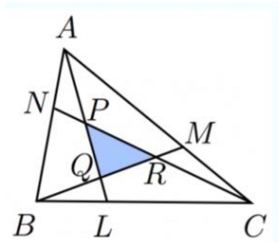
三角形の線分の比と面積比

三角形 ABC の各辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ L, M, N を，
$\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。 AL と CN の交点を P,
AL と BM の交点を Q，BM と CN の交点を R とするとき，
三角形 PQR と三角形 ABC の面積比を求めよ。

（図 1）



解答　点 L から直線 BM に平行な直線を引き，辺 AC との交点を S とする。
$MS:SC=BL:LC=1:2$ ， $AM:MC=2:1$ だから，連比で考えると，
$AM:MS:SC=6:1:2$ となる。すると， $AQ:QL=AM:MS=6:1$
$\triangle ABL$ と $\triangle ABQ$ の面積比を考えると， $\triangle ABL:\triangle ABQ=AL:AQ=7:6$
ゆえに， $\triangle ABQ=\dfrac{6}{7}\triangle ABL=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{1}{3}\triangle ABC=\dfrac{2}{7}\triangle ABC$ ，

辺を内分する比が同じだから， $\triangle BCR=\triangle CAP=\triangle ABQ=\dfrac{2}{7}\triangle ABC$

よって, $\triangle PQR=\triangle ABC-3\times\triangle ABQ=\triangle ABC-\dfrac{6}{7}\triangle ABC=\dfrac{1}{7}\triangle ABC\cdots\cdots(*)$

したがって， $\triangle PQR:\triangle ABC=1:7$　　答

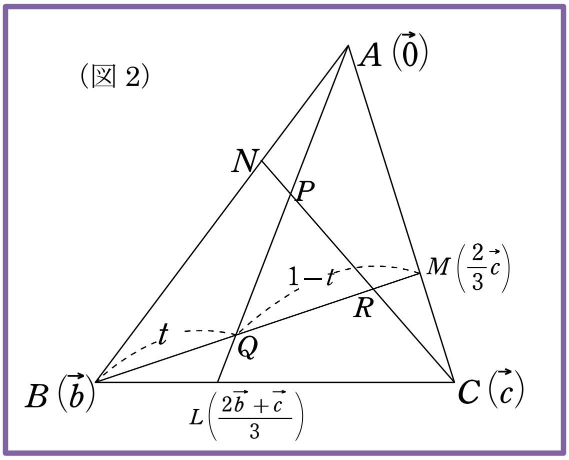
発展　それでは一般化して， $\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{m}{n}$ （ただし， $m\fallingdotseq n$ ）
とした場合はどうなるだろうか？

まずメネラウスの定理を使って， $\dfrac{AQ}{QL}\cdot\dfrac{LB}{BC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=1\Leftrightarrow\dfrac{AQ}{QL}\cdot\dfrac{m}{m+n}\cdot\dfrac{m}{n}=1$

よって， $\dfrac{AQ}{QL}=\dfrac{n(m+n)}{m^2}$ ， これより， $AQ:AL=n(m+n):\{n(m+n)+m^2\}$

$$\therefore\quad\triangle ABQ=\frac{AQ}{AL}\triangle ABL=\frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\times\frac{m}{m+n}\triangle ABC=\frac{mn}{m^2+mn+n^2}\triangle ABC$$

$(*)$ より, $\triangle PQR=\triangle ABC-3\times\triangle ABQ=\left(1-\dfrac{3mn}{m^2+mn+n^2}\right)\triangle ABC=\underline{\dfrac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}\triangle ABC}$



ベクトルの利用

別解　次に，ベクトルの利用を考えよう！(図2) のように，点 A を原点とする位置ベクトルを考え, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ とする。

与えられた線分の比より, $L\left(\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$, $M\left(\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)$ となる。

続いて, $BQ:QM=t:(1-t)$ とすると, $\overrightarrow{AQ}=(1-t)\vec{b}+\dfrac{2}{3}t\vec{c}$ ……① と表される。

一方, $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AL}$ とも表され, $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$ ……② となる。

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行ではなく, $\overrightarrow{AQ}$ は $\vec{b}$ と $\vec{c}$ によって1通りに表されるから,

(これを「 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立である」という)　$1-t=\dfrac{2}{3}k$ ……③ , $\dfrac{2}{3}t=\dfrac{1}{3}k$ ……④

③, ④ を解いて, $k=\dfrac{6}{7}$, $t=\dfrac{3}{7}$, よって, $\triangle ABQ=\dfrac{6}{7}\triangle ABL=\dfrac{2}{7}\triangle ABC$

同じ位置関係にあるので, $\triangle BCR=\triangle CAP=\triangle ABQ=\dfrac{2}{7}\triangle ABC$, 以下 (*) と同じ。

補足　$\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{m}{n}$ (ただし, $m \neq n$) とした場合は，ベクトルの得意とするところである。　別解と同じ位置ベクトル設定でいくと,

$$L\left(\frac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}\right),\qquad M\left(\frac{n}{m+n}\vec{c}\right)$$

$BQ:QM=t:(1-t)$ として, $\overrightarrow{AQ}=(1-t)\vec{b}+\dfrac{tn}{m+n}\vec{c}$ ……⑤

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AL}$ とも表され, $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{kn}{m+n}\vec{b}+\dfrac{km}{m+n}\vec{c}$ ……⑥ となる。

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立だから, $1-t=\dfrac{kn}{m+n}$ ……⑦ , $\dfrac{tn}{m+n}=\dfrac{km}{m+n}$ ……⑧

⑦, ⑧ を解いて, $k=\dfrac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$, $t=\dfrac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2}$

$\triangle ABQ=k\triangle ABL=\dfrac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}\times\dfrac{m}{m+n}\triangle ABC=\dfrac{mn}{m^2+mn+n^2}\triangle ABC$

以下, 発展と同じ。 (m,n) に様々な値を代入すると，直ちに面積比が求められる。